

Kernfragen zur Analysis

II.1 Folgen

1. Wann nennt man eine Folge x_n reeller Zahlen konvergent und wann uneigentlich konvergent?
2. Wie ist der Grenzwert einer Folge definiert?
3. Was sind Supremum und Infimum der Folgen $(1 + \frac{1}{n})^n$ und $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$?
4. Wie sind Häufungswerte einer Folge x_n komplexer Zahlen definiert?
5. Was sind die Häufungswerte der Folge $(-1)^n + \frac{1}{n}$?
6. Was sind Limes superior und Limes inferior einer reellwertigen Folge? Wann existieren sie? Wann stimmen Limes superior und Limes inferior überein?
7. Konstruiere eine reelle Folge, die jede reelle Zahl als Häufungswert hat.
8. Wann heißt eine Menge $A \subseteq B$ dicht in B ? Gilt Dichtheit für $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{Q} + i(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{C}$? Warum?
9. Was besagt das Konvergenzkriterium von Cauchy? Warum gilt es?
10. Welche monotonen Folgen besitzen einen Grenzwert?
11. Welche dieser Folgen konvergieren für $n \rightarrow \infty$? Was sind ggf. ihre Grenzwerte, einschließlich $\pm\infty$?

$$\frac{n^2}{3n-2}, \quad \frac{3n^2-2}{2n^2+3}, \quad \frac{2^n}{n!}, \quad \sqrt[n]{n}, \quad q^{1/n} \text{ (für reelle } q > 0), \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

12. Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß?
13. Wieviele Häufungswerte kann eine beschränkte, reellwertige Folge mindestens/höchstens besitzen?
14. Wie kann man den Kreisumfang durch Approximation mit regulären 2^n -Ecken bestimmen?
15. Gib zwei Definitionen der Eulerschen Zahl e . Warum stimmen beide Definitionen überein?
16. Wie lauten die Abschätzungen für $n!$ von Stirling?